

Curso Primero - Ingeniería en Informática

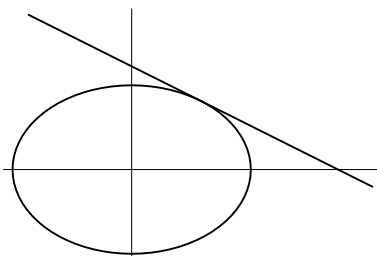
Análisis Matemático

Soluciones de los ejercicios propuestos en la prueba del día 22/12/2004

Ejercicio 1. Determinar un punto (u, v) ($u > 0, v > 0$) de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes un segmento de longitud mínima.



Solución. Consideraremos la función $f(x) = \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$, $0 < x < 5$ cuya gráfica es la parte superior de la elipse. La tangente en un punto (u, v) viene dada por

$$y - v = f'(u)(x - u) = -\frac{4}{5} \frac{u}{\sqrt{25-u^2}} (x - u)$$

Haciendo $x = 0$ e $y = 0$ obtenemos los puntos de corte con los ejes $(0, y_0)$, $(x_0, 0)$ que vienen dados por

$$y_0 = v + \frac{4}{5} \frac{u^2}{\sqrt{25-u^2}} \quad (1)$$

$$x_0 = \left(v + \frac{4}{5} \frac{u^2}{\sqrt{25-u^2}} \right) \frac{5}{4} \frac{\sqrt{25-u^2}}{u} \quad (2)$$

Simplificamos las expresiones obtenidas teniendo en cuenta que

$$\frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{16} = 1 \implies \begin{cases} \sqrt{25-u^2} = \frac{5}{4}v \\ u = \frac{5}{4}\sqrt{16-v^2} \end{cases}$$

Sustituyendo en (??) y (??) resulta fácilmente:

$$y_0 = \frac{16}{v}, \quad x_0 = \frac{20}{\sqrt{16-v^2}}$$

Por tanto la función de la que debemos calcular su mínimo absoluto es

$$\sqrt{\frac{(16)^2}{v^2} + \frac{(20)^2}{16-v^2}} = 4\sqrt{\frac{16}{v^2} + \frac{25}{16-v^2}} \quad (3)$$

Como la raíz cuadrada conserva el orden en los reales positivos, el mínimo absoluto de dicha función se alcanza en el mismo punto que el mínimo absoluto de la función

$$h(v) = \frac{16}{v^2} + \frac{25}{16-v^2}$$

función que está definida para $0 < v < 4$. Calculamos los puntos donde se anula su derivada

$$h'(v) = -\frac{32}{v^3} + \frac{50v}{(16-v^2)^2} = 2 \left(\frac{-16(16-v^2)^2 + 25v^4}{v^3(16-v^2)^2} \right) = 2 \left(\frac{9v^4 + 2(16)^2v - (16)^3}{v^3(16-v^2)^2} \right)$$

Por tanto los ceros de la derivada vienen dados por

$$9v^4 + 2(16)^2v - (16)^3 = 0 \implies v^2 = \frac{-2(16)^2 + \sqrt{4(16)^4 + 36(16)^3}}{18} = \frac{64}{9} \implies v = \frac{8}{3}$$

Donde hemos elegido la solución positiva. La solución obtenida está en el intervalo $]0, 4[$ y es el único punto de dicho intervalo donde se anula h' . Deducimos que h' tiene signo constante en los intervalos $]0, \frac{8}{3}[$ y $]\frac{8}{3}, 4[$ (porque es continua en ellos y no se anula). Como, evidentemente

$$\lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ v > 0}} h'(v) = -\infty \quad \lim_{\substack{v \rightarrow 4 \\ v < 4}} h'(v) = +\infty$$

concluimos que:

$$\begin{aligned} 0 < v < \frac{8}{3} &\implies h'(v) < 0 \implies h \text{ es decreciente en }]0, \frac{8}{3}[\\ \frac{8}{3} < v < 4 &\implies h'(v) > 0 \implies h \text{ es creciente en }]\frac{8}{3}, 4[\end{aligned}$$

Concluimos así que h alcanza un mínimo absoluto en $v = \frac{8}{3}$. Por tanto la longitud mínima del segmento determinado por la tangente a la elipse y los ejes coordenados se obtiene haciendo en (??) $v = \frac{8}{3}$ resultando ser igual a 9.

Ejercicio 2. Calcular la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)} dx$.

Solución. Por definición

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x^2+x+1)} dx$$

Para calcular la integral

$$\int_1^t \frac{1}{x(x^2+x+1)} dx \quad (t > 1)$$

usaremos la regla de Barrow. Calculemos una primitiva de la función

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)}$$

se trata de una función racional. Como el polinomio $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma

$$\frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Multiplicando e identificando numeradores

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x$$

Haciendo $x = 0$ obtenemos $A = 1$. Igualando coeficientes de x^2 se tiene $A + B = 0$, por lo que $B = -1$. Igualando coeficientes de x se tiene $A + C = 0$, luego $C = -1$.

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx &= \int_1^t \frac{1}{x} dx - \int_1^t \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \log(t) - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \log(t) - \frac{1}{2} \log(t^2 + t + 1) + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx \\ &= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^t \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \sqrt{3} \\ &= \frac{\log 3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} + \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\right) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

concluimos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx = \frac{\log 3}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18} \pi$$

Observaciones, comentarios, reflexiones

Los dos ejercicios propuestos son, cada uno en su estilo, lo más fácil que se puede poner.

El primer ejercicio se parece mucho a uno hecho en clase en el que se pedía un punto de la elipse por la condición de que el triángulo determinado por la tangente en dicho punto y los ejes coordenados tuviera área mínima.

Nadie ha hecho bien el primer ejercicio. Con alguna excepción nadie ha llegado a plantearlo correctamente.

Nadie ha hecho bien el segundo ejercicio. Nadie ha calculado bien la primitiva de la función.

Los fallos más notables son:

- No sabéis calcular la tangente a la gráfica de una función.
- Algunos intentáis calcular los puntos de corte sin calcular antes la recta tangente.
- Algunos se equivocan por elegir muy mala notación confundiendo variables.
- Muchísimos fallos de cálculo. Disparates increíbles (se los enseñaré a quien quiera verlos) como los siguientes:

- $\frac{x}{y} = \frac{x - 1/4}{y + 1/4}$

- $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$

- Decir que la ecuación de la elipse es de la forma $y = \frac{x - a}{b}$

- $\log(2x) = 2\log x$

- $(x + 1)^2 = x^2 + x + 1$

- $\frac{t}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{t + 2}$

- $\frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x}$

- $\int \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx = \int \frac{1}{x} dx \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

- No sabéis completar un cuadrado. Con una sola excepción nadie ha hecho bien la siguiente (al parecer difícil) operación $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$.
- No sabéis integrar una fracción simple cuando la raíz es imaginaria.
- Algunos os equivocáis al derivar una raíz cuadrada.